Berufsbildende Schule
Bad Dürkheim

Im Salzbrunnen 7 • 67098 Bad Dürkheim
Telefon: 06322-95180 • Fax: 06322-951844 • E-Mail: sekretariat@bbs-duew.de

Repetitorium

zur Vorbereitung in

Mathematik

auf die/den

Höhere Berufsfachschule
Duale Berufsoberschule
Fachhochschulreifeunterricht

Liebe Schülerinnen und Schüler,
wesentliche Voraussetzungen für den erfolgreichen Beginn Ihrer Schulzeit an der Höheren Berufsfachschule, der Dualen Berufsoberschule oder im Fachhochschulreifeunterricht sind im Hinblick auf die Erlangung der Fachhochschulreife ausreichende Vorkenntnisse u.a. in Mathematik.

Zu den mathematischen Vorkenntnissen gehören vor allem:

- Vertrautheit mit grundlegenden Rechenregeln bzw. im Umgang mit Zahlen
- Klammern auflösen können (auch verschachtelte Terme mit mehreren Klammern)
- Ausmultiplizieren von Klammertermen
- Faktorisieren von Termen, d.h. Zerlegen in Faktoren
- Umgang mit den Binomischen Formeln sicher beherrschen
- Bruchterme sicher umformen.
- Gesetze der Potenz- und Wurzelrechnung kennen und anwenden können
- Souveräner Umgang mit <u>linearen Funktionen</u> und Gleichungen (Bestimmen bzw. Ablesen der Steigung, des Schnittpunktes mit der y-Achse und der Nullstelle einer vorgegebenen linearen Funktion; Herleitung der linearen Funktionsgleichung, falls zwei Punkte oder Punkt und Steigung gegeben sind; Zeichnen der Graphen linearer Funktionen; Kenntnis spezieller linearer Funktionen wie parallele Geraden oder konstante Funktionen)
- Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen lösen können
- <u>Quadratische Funktionen</u> untersuchen und zeichnen können (z. B. Ermitteln des Schnittpunktes mit der y-Achse und der Nullstellen sowie des Scheitelpunktes; Bestimmung der Schnittpunkte zweier Funktionen, z. B. von Parabel und Gerade) bzw. quadratische Gleichungen lösen können

- Darüber hinaus sind Grundkenntnisse in bspw. Prozent, Zins- und Dreisatzrechnung sowie Basiskenntnisse in Flächen- und Volumenberechnung in unterschiedlichsten Zusammenhängen wie z. B. Textaufgaben gefragt.

Die vorliegenden Aufgaben - mit Lösungen im Anhang - sollten Sie bis zum Beginn des neuen Schuljahres durcharbeiten, um Ihr mathematisches Wissen aufzufrischen und gegebenenfalls bestehende Wissenslücken <u>selbstständig</u> aufzuarbeiten. Bitte notieren Sie offene Fragen. Suchen Sie auch Hilfen in Ihren Unterlagen zum Mathematikunterricht (z.B. Lehrbücher, Formelsammlung, Mitschriften).

Und nun viel Erfolg!

1. Grundlegende Rechenregeln

Multiplikation und Division von ganzen Zahlen

<u>Regel 1a:</u>
Das Produkt (der Quotient) zweier Zahlen mit gleichem Vorzeichen ist positiv.
Das Produkt (der Quotient) zweier Zahlen mit unterschiedlichem Vorzeichen ist negativ.

Es gilt folglich: (+a) * (+b) = **+** ab (+a) * (-b) = **-** ab
(-a) * (-b) = **+** ab (-a) * (+b) = **-** ab (analog für Division)

<u>Beispiele</u>:
a) 6 * 3 = 18 9 * (-8) = -72

b) -6 * (-4) = 24 -9 * (+5) = -45

c) -4 * (-5) * (-3) = -60 -12x * 4y * (-2z) = 96xyz

Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen

<u>Regel 1b:</u>
Es gilt: a + (+b) = a **+** b a + (-b) = a **–** b
a – (-b) = a **+** b a – (+b) = a **–** b

<u>Beispiele:</u>
a) 5 + (-3) = 5 – 3 8 + (-6) = 8 – 6

b) 6 – (-4) = 6 + 4 9 – (+2) = 9 – 2

<u>Regel 1c:</u>
Zahlen mit gleichem Vorzeichen werden addiert, indem man die Beträge addiert und das Vorzeichen beibehält.

Beispiele:
a) $+12 + 21 = +(12 + 21) = \mathbf{+}\ 33$

b) $-9 - 7 = -(9 + 7) = \mathbf{-}\ 16$

c) $-9 + (-7) = -(9 + 7) = \mathbf{-}\ 16$ (führt laut Regel 1b zum gleichen Ergebnis)

Regel 1d:
Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen werden addiert, indem man vom größeren Betrag den kleineren Betrag subtrahiert; das Ergebnis erhält das Vorzeichen der betragsmäßig größeren Zahl.

Beispiele:
a) $+12 \mathbf{-} 25 = \mathbf{-}(25 - 12) = \mathbf{-}\ 13$

b) $\mathbf{-}19 + 7 = \mathbf{-}(19 - 7) = \mathbf{-}\ 12$

c) $-39 \mathbf{+} 45 = \mathbf{+}(45 - 39) = \mathbf{+}\ 6$

d) $\mathbf{+}45 - 39 = \mathbf{+}(45 - 39) = \mathbf{+}6$

Tipp:
Oftmals kann man sich diese Regeln leicht veranschaulichen, z. B.:
$-9 - 7 = -16$ 9 € und 7 € Schulden ergeben 16 € Schulden

$-2 + 6 = +4$ Temperatur steigt von -2 ° C um 6 auf +4 ° C

Zusammenfassen vom Termen

Regel 1e:
Terme können nur zusammengefasst, also addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sie gleichartig sind.

Beispiele:
a) $2x \mathbf{- 17y} + 32x \mathbf{- 11y} = 34x \mathbf{- 28y}$

b) $5a \mathbf{- 6b} \underline{- 4c} \mathbf{+ 7b} - 5a \underline{+ 3c} = \mathbf{b} \underline{- c}$

c) $\mathbf{12x^2y} - 8xy + 9xy^2 \mathbf{+ 5x^2y} = \mathbf{17x^2y} - 8xy + 9xy^2$

Reihenfolge der Berechnung

Regel 1f:
Hinsichtlich der Reihenfolge der durchzuführenden Rechenoperationen hat die **K**lammerrechnung Vorrang vor der **Po**tenz- bzw. Wurzelrechnung, diese wiederum hat Vorrang vor der **Pu**nktrechnung und diese vor der **S**trichrechnung.

Eselsbrücke: alphabetisch geordnet => **K Po Pu S**

Beispiele:

a) $2*(5-3)^3 + 6:3 =$

$2* \quad 2^3 \quad + 6:3 =$	K
$2* \quad 8 \quad + 6:3 =$	Po
$16 \quad + 2 =$	Pu
18	S

b) $4*\sqrt{11-2} - 6*2 =$

$4*\sqrt{9} \quad - 6*2 =$	K (hier ist bei 11 – 2 gedanklich eine Klammer zu setzen)
$4*3 \quad - 6*2 =$	Po (in dem Fall eine Wurzel)
$12 \quad - 12 =$	Pu
0	S

Aufgaben:

1. 34 + 27
2. -31 – 19
3. 61 – 73
4. -22 – 54
5. -34 + 16
6. 42a – 11b – 13a – 7b
7. -13x – 22y + 8z + 13x – 9z – 14y
8. $11ab^3 + 12ab - 3a^3b^2 + 16ab^3$
9. $2*(6-3)^3 + 5*3$
10. $3*(7-2)^2 + 12:4$
11. 8a * (-2b) * (-3c)
12. 9x * (-5y) * 3x * 0 * (-z)

2. Auflösen von Klammern (auch in verschachtelten Termen)

Regeln:
Steht vor einem Klammerterm ein Additionszeichen (+), so kann man die Klammern weglassen und die Rechenzeichen in der Klammer bleiben gleich.

Steht vor einem Klammerterm ein Subtraktionszeichen (-), so ändern sich beim Weglassen der Klammern die Rechenzeichen.

Bei verschachtelten Termen sind zunächst die inneren Klammern, anschließend die äußeren Klammern aufzulösen.

Beispiele:

a) 5a **+ (12 – 3a)** = (vor der 12 in der Klammer kann man sich ein + denken)
5a **+ 12 – 3a** =
2a + 12

b) 13x **– (-5x + 12y)** – 1 =
13x **+5x – 12y** – 1 =
18x – 12y – 1

c) 4a – [5 – (2b – 3a) + (4b – 2a)] = (zunächst die inneren - runden- Klammern auflösen)
4a – [5 – 2b + 3a + 4b – 2a] =
4a – [5 + 2b + a] =
4a – 5 – 2b – a = 3a – 5 – 2b

Aufgaben:

1. 9a + (21 – 5a)

2. -25a – (-6 – 24a) – 1

3. 6a – [8 – (3b + 3a) – (9b – 2a)]

4. Wie lautet das Endergebnis bei Aufgabe 3 für a = -2 und b = -1 ?

5. -8 – [-3x + (3y – 3x) – (9 – 2x)]

3. Ausklammern (Faktorisieren) und Ausmultiplizieren

Regel:
Kommt in allen Summanden eines Terms ein gemeinsamer Faktor vor, so kann dieser ausgeklammert werden.
Folglich wird beim Faktorisieren eine Summe in ein Produkt umgewandelt.

Beispiele:

a) 3a + 12 = **3**(a + 4)

b) 15bc – 9cd = **3c**(5b – 3d)

c) $12a^6b^5 - 3a^9b^2 + 18a^4b^7 = 3a^4b^2(4a^2b^3 - a^5 + 6b^5)$

d) mn + ms + mt – m = **m**(n + s + t – 1)

Die Probe des Ausklammerns erfolgt durch Ausmultiplizieren.

Z. B. bei Bsp. d) m(n + s + t – 1) = mn + ms + mt – m

Regel:
Beim Ausmultiplizieren wird jeder Summand der Klammer mit dem Faktor außerhalb der Klammer multipliziert.
Dementsprechend wird beim Ausmultiplizieren ein Produkt in eine Summe umgewandelt.

Beispiele:

a) (a + 7)*5 = 5a + 35

b) 9d(5b – 3d) = 45bd – 27d²

c) $3a^5b^2(5a^4 - a^2b + 6b^5) = 15a^9b^2 - 3a^7b^3 + 18a^5b^7$

Wie man leicht erkennt, stellt das Ausklammern die Probe des Ausmultiplizierens dar.

Aufgaben: Faktorisieren Sie oder multiplizieren Sie aus

1. $9a + 18$
2. $-25a + 10b$
3. $ab - ac + a$
4. $12ab + 36ab^3 + 18a^2b$
5. $-8x(2x - 3)$
6. $(6c - 5d + 3b)7b$
7. $4a^7b^2(5a^4 - a^2b + 3b^4)$
8. $-5x^{11}y^4(5x^2 - x^4y^3 + 6y)$
9. Ergänzen Sie: Beim Ausklammern wird ___________________________ in ________________________ umgewandelt.

4. Multiplikation von Klammertermen und binomische Formeln

Regel:
Beim Multiplizieren zweier Klammern wird jeder Summand der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert. Dabei sind die jeweiligen Vorzeichen zu berücksichtigen.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Beispiele:

a) $(x + 4)(y + 3) = x \cdot y + x \cdot 3 + 4 \cdot y + 4 \cdot 3 = xy + 3x + 4y + 12$

b) $(a + 2b)(3b - 1) = a \cdot 3b - a \cdot 1 + 2b \cdot 3b - 2b \cdot 1 = 3ab - a + 6b^2 - 2b$

c) $(x + 4)(x + 4) = x^2 \mathbf{+ 4x + 4x} + 16 = x^2 \mathbf{+ 8x} + 16$

d) $(a - 9)(a - 9) = a^2 \mathbf{- 9a - 9a} + 81 = a^2 \mathbf{- 18a} + 81$

e) $(a - 10)(a + 10) = a^2 \mathbf{- 10a + 10a} - 100 = a^2 - 100$

Wie man sieht, handelt es sich bei den Beispielen c, d, e um Spezialfälle,
die **Binomischen Formeln**:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$

Diese sollten möglichst ohne Berechnung direkt angewandt werden können! Bei den Beispielen oben wurden sie lediglich durch Ausmultiplizieren eines Binoms (zwei gleiche Klammerterme) hergeleitet.

Auch „rückwärts“ sollte man sie beherrschen, d.h. beim Zerlegen von Summen in Faktoren.

Beispiele:

a) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$ (s. o.)

b) $(a + c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$

c) $(y - 11)^2 = y^2 - 22y + 121$

d) $(a - 5)(a - 5) = a^2 - 10a + 25$

e) $(8a - 3b)^2 = 64a^2 - 48ab + 9b^2$

f) $(5a^4 - 4b^3)^2 = 25a^8 - 40a^4b^3 + 16b^6$

g) $(7a^6 - 3a^5)(7a^6 + 3a^5) = 49a^{12} - 9a^{10}$

Binomische Formeln “rückwärts”:

h) $36a^{12} - 24a^6b^3 + 4b^6 = (6a^6 - 2b^3)^2$

i) $100a^{16} + 60a^{11} + 9a^6 = (10a^8 + 3a^3)^2$

j) $a^2 - 10a + 16$ geht nicht, da 2*a*4 ungleich 10a

k) $49b^{12} - 25 = (7b^6 - 5)(7b^6 + 5)$

Aufgaben:

Multiplizieren Sie aus bzw. wenden Sie direkt die binomischen Formeln an und fassen Sie gfs. zusammen:

1. $(2x + y)(1 - x)$
2. $(x - 1)(y + 2)$
3. $(a + 3b)(2b + a - 5)$
4. $(x - 3y + 4)(2x - 5)$
5. $(y - 9)^2$
6. $(x^7 + 2)(x^7 - 2)$
7. $(4x + 3)(4x + 3)$
8. $(8b^6 - 5a^3)^2$
9. $(x - 3)(x + 5) - 2(3x - 1)^2$

Faktorisieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln, falls möglich:

10. $a^2 - 10a + 25$
11. $81c^8 - 36$
12. $49a^4 + 42a^2 + 9 =$

5. Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Regel:
Ungleichnamige Bruchterme werden zunächst gleichnamig (gleicher Nenner) gemacht. Anschließend werden die gleichnamigen Terme addiert (subtrahiert), indem man die Zähler addiert (subtrahiert) und den Nenner beibehält.

Beispiele:

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$

b) $\frac{a}{b}-\frac{1}{ab}=\frac{a\cdot a}{a\cdot b}-\frac{1}{ab}=\frac{a^2-1}{ab}$

c) $\frac{3}{m+2}-\frac{1}{m}=\frac{3\cdot m}{(m+2)\cdot m}-\frac{1\cdot(m+2)}{m\cdot(m+2)}=\frac{3m-1\cdot(m+2)}{m\cdot(m+2)}=\frac{3m-1m-2}{m\cdot(m+2)}=\frac{2m-2}{m^2+2m}$

Aufgaben:

1. $\frac{1}{7}+\frac{2}{5}$

2. $\frac{2}{9}+\frac{5}{18}-\frac{7}{12}$

3. $\frac{2}{a+1}+\frac{1}{a}$

4. $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

5. $\frac{3x-y}{x^2-y^2}-\frac{5}{x+y}$

6. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}$

Tipp: Bei manchen Aufgaben ist der Einsatz binomischer Formeln vorteilhaft!

6. Multiplikation und Division von Bruchtermen

Regel:
Brüche werden multipliziert, indem man sowohl die Zähler als auch die Nenner miteinander multipliziert.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \text{(Multiplikation)}$$

Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc} \qquad \text{(Division)}$$

Beispiele:

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{11}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 11}=\frac{1}{11}$

b) $\frac{36ab}{11}\cdot\frac{44b}{12a}=\frac{36ab\cdot 44b}{11\cdot 12a}=\frac{3ab\cdot 4b}{1\cdot 1a}=12b^2$

c) $\frac{3}{7}:5=\frac{3}{7}:\frac{5}{1}=\frac{3\cdot 1}{7\cdot 5}=\frac{3}{35}$

d) $\frac{m}{c-y}\div\frac{5m}{3c-3y}=\frac{m}{c-y}\cdot\frac{3c-3y}{5m}=\frac{m}{c-y}\cdot\frac{3(c-y)}{5m}=\frac{3}{5}$

Tipp (insbesondere auch zu den nachfolgenden Aufgaben): Kürzen Sie so früh wie möglich und nutzen Sie Verfahren wie Faktorisieren oder Binomische Formeln, falls möglich!

Aufgaben:

1. $\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{12}$
2. $-\frac{9}{8}:\frac{18}{5}$
3. $x\cdot\frac{2x}{y^2}$
4. $\frac{3a}{4b}\cdot\frac{2b}{15a}$
5. $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot(x+y)$
6. $\frac{a}{b+x}\div\frac{4a}{2x+2b}$
7. $\frac{-a}{b}\div\frac{a}{-x}$
8. $\frac{x-1}{x+1}\div\frac{x^2-1}{x^2+1}$

7. Potenzen

Für natürliche Zahlen n wird definiert: $a^n=a\cdot a\ldots\cdot a$ $\quad (n\ gleiche\ Faktoren)$.
Daraus folgen für $m,n\in N$ die Rechenregeln:

$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ $\qquad$ $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\quad (für\quad n>m)$ $\qquad$ $\left(a^n\right)^m=a^{nm}$

$a^nb^n=(ab)^n$ $\qquad$ $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$

Mit den Festsetzungen $a^o=1$, $a^1=a$ und $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $\quad (n\in N)$ gelten diese Regeln für alle ganze Zahlen n,m.

Tipps:
Mit einfachen (Zahlen-)Beispielen kann man sich diese Regeln bzw. Festlegungen immer wieder veranschaulichen!
Bei einigen der nachfolgenden Aufgabenstellungen sind mehrere Regeln / Definitionen anzuwenden.

Beispiele:

a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, und **NICHT** $3^4 = 3 \cdot 4 = 12$!!!

b) $n^4 \cdot n^{19} = n^{23}$

c) $\dfrac{y^{19}}{y^5} = y^{14}$

d) $\left(\dfrac{a^6}{b^3}\right)^3 = \dfrac{a^{18}}{b^9}$

e) $\dfrac{c^{m+4}}{c^{m-2}} = c^6$

Aufgaben:
Vereinfachen Sie:

1. $x^6 x^5$ 2. $x^{19} \cdot x$ 3. $\dfrac{a^9}{a^4}$ 4. $(a^3)^5$ 5. $(-a^2)^3$

6. $(a^2 b^3)^3$ 7. $\dfrac{a^{n+1} b^{m+1}}{a^{n-1} b^m}$ 8. $(-1)^{2n}$ 9. $(-1)^{2n+1}$

10. $\dfrac{4a^3b^4c}{9c^5} \div \left(\dfrac{3c^3}{2a^2b^{-3}}\right)^{-2}$

11. Welche Zahl ist größer: 3^{3^3} oder $(3^3)^3$?

12. Die Kantenlänge eines Würfels beträgt $\frac{4}{5}$ von der eines zweiten Würfels. Wie verhalten sich die Oberflächen und Volumina der beiden Würfel zueinander?

8. Wurzeln

Die positive Lösung der Gleichung $x^n = a \quad (n \in N, \quad a > 0)$ heißt $x = \sqrt[n]{a}$.

Für $n = 2$, also $\sqrt[2]{a}$ schreibt man $\sqrt{a}$ (Quadratwurzel). Die so definierten Wurzeln befolgen die Rechenregeln:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a^{m-n}}$

Setzt man $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ und $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$,

so führen die obigen Wurzelregeln zur Erweiterung der Potenzregeln auf rationale Exponenten. (Mit anderen Worten: Die obigen Wurzelregeln lassen sich aus diesen beiden Festlegungen herleiten.)

<u>Beispiele:</u>

a) $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$; <u>Probe:</u> $3^3 = 27$

b) $\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}} = 3$; <u>Probe:</u> $3^4 = 81$

c) $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$; <u>Probe:</u> $5^2 = 25$

Wie man also erkennt, ist das Radizieren (Wurzelziehen) die Umkehrung des Potenzierens (und umgekehrt)!

d) Teilweises Wurzelziehen (Radizieren): $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

e) Rationalmachen des Nenners:

e1) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Erweiterung mit $\sqrt{2}$)

e2) $\frac{2}{5+\sqrt{3}} = \frac{2(5-\sqrt{3})}{(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})} = \frac{10-2\sqrt{3}}{25-3} = \frac{10-2\sqrt{3}}{22}$ (Erw. mit (5 - $\sqrt{3}$) und 3. Bin. F.)

f) $\sqrt{27b} \cdot \sqrt{3b} = \sqrt{81b^2} = 9b$

g) $\frac{\sqrt[3]{128b^5d^{11}}}{\sqrt[3]{2b^2d^5}} = \sqrt[3]{64b^3d^6} = 4bd^2$

<u>Aufgaben:</u>
Berechnen Sie möglichst im Kopf:

1. $\sqrt{2a}\sqrt{72a}$

2. $\sqrt{125} \div \sqrt{5}$

3. $\sqrt{\frac{36a^2b^4}{4a^4b^2}}$

4. $\sqrt{xy}\sqrt{\frac{x}{y}}$

Machen Sie die Nenner rational:

5. $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ 6. $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

7. Zeigen Sie, dass für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ stets $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$ ist.
(Tipp: Eine der binomischen Formeln kann hierbei helfen!)

Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

8. $\sqrt{28}+\sqrt{63}$ 9. $\sqrt[3]{63x^7y^6z^2} \div \sqrt[3]{\frac{9x^4y^3}{49z}}$

9. Gleichungen und Gleichungssysteme

Lösen linearer Gleichungen

Beispiele:

a)
$$\begin{aligned} 5x-3 &= -8x+2 && \mid +8x \\ 13x-3 &= +2 && \mid +3 \\ 13x &= +5 && \mid :13 \\ x &= \frac{5}{13} && \Rightarrow L=\{\tfrac{5}{13}\} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4x-3 &= 4x+6 && \mid -4x \\ -3 &= +6 && \text{falsche Aussage!} \end{aligned}$$

=> L = { } (die Lösungsmenge ist die leere Menge, sprich es gibt keine Lösung)

Merke:
Das Lösen von linearen Gleichungen erfolgt durch **Äquivalenzumformungen**, bei denen die Lösungsmenge unverändert bleibt. (**Waagenmodell** !!!)

- Addition bzw. Subtraktion derselben Zahl / desselben Terms **auf beiden Seiten**

- Multiplikation bzw. Division mit derselben Zahl / demselben Term **auf beiden Seiten**

Ziel: Auflösen nach x, d.h. x muss am Ende alleine stehen!

Aufgaben: Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungen:

1. $5 + x = 2$

2. $3x + 1 = 7$

3. $2x + 3 = 7x - 12$

4. $x - 1 = -2x - 4$

5. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{1}{11}$

6. $11x + 8 = 11x - 12$

7. $4(2 + 3x) - 2(5x - 2) = 7$

Lineare Gleichungssysteme lösen (hier: LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten)

Beispiele:

a) I) **y** = 4x – 1
II) 6x + 3 = **y**

Es gibt mehrere Lösungsansätze. Hier bietet sich das **Gleichsetzungsverfahren** an, da eine Variable (in diesem Bsp. y) jeweils „isoliert“ ist.

4x – 1 = 6x + 3 => x = -2 (gleichsetzen und nach x auflösen)

x = -2 in eine der beiden Gleichungen einsetzen, z. B. I) y = 4***(-2)** – 1 = -9

Lösungsmenge angeben: L = { (-2 / -9) } (zuerst x, dann y; alphabetisch geordnet!)

b) I) 2x + 3y = 13
II) 8y – 3 = **x**

In diesem Fall bietet sich das **Einsetzungsverfahren** an,
da eine Variable (in diesem Bsp. x) in einer Gleichung alleine steht.

I) 2**x** + 3y = 13

II) 8y – 3 **= x**

Einsetzen von (8y – 3) für x in Gleichung I), dabei Klammern nicht vergessen!!!

I) 2**(8y – 3)** + 3y = 13 (Ausmultiplizieren, zusammenfassen und nach y auflösen)

16y – 6 + 3y = 13 => y = 1

y = 1 in eine der beiden Gleich. einsetzen, hier am Besten in II) 8***1** – 3 = x => x = 5

Lösungsmenge angeben: L = { (5 / 1) }

c) I) 4x + 8y = 28 3 * (I) => Ia) **12**x + 24y = 84
II) -3x + 7y = -8 4 * (II) => IIa) **-12**x + 28y = -32

Ia) + IIa) 52y = 52 $\mid :52$
y = 1

y = 1 in eine der beiden Gleichungen einsetzen, z. B. II)
II): -3x + 7***1** = -8
-3x + 7 = -8 $\mid -7$
-3x = -15 $\mid :(-3)$
x = 5
Lösungsmenge angeben: <u>L = { (5 / 1) }</u>

Dieses Verfahren bezeichnet man als **Additionsverfahren**.

<u>Merke:</u> Linke Seite minus (bzw. plus) linke Seite, rechte Seite minus (bzw. plus) rechte Seite!

Sind die Vorzeichen gleich (z. B. -2 und -2), so muss man subtrahieren!

Sind sie unterschiedlich (z. B. 3 und -3), so muss man addieren!

<u>Aufgaben:</u> Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit 2 Variablen:

8. I) $4x - 3y = 17$
II) $-5x + 6y = -28$

9. I) $2x + 4 = 3y$
II) $-10 + 4x = y - 1$

10. I) $2x - 3y = 8$
II) $-6x + 12 = 3y$

11. I) $3x + 4 = y$
II) $-12 + 4x = y$

12. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 9. Stellt man die beiden Ziffern um, so erhält man eine Zahl, die um 9 größer ist als die ursprüngliche Zahl. Wie heißt die Zahl?

Quadratische Gleichungen lösen

Für die quadratische Gleichung in **Normalform** $x^2 + px + q = 0 \ \ (p, q \in R)$ heißt die Lösungsformel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

<u>WICHTIG:</u> 1) <u>Vor x²</u> darf <u>„nichts“</u> stehen (man kann sich den Faktor 1 denken) !!!
2) <u>Auf einer Seite</u> der quadr. Gleichung muss <u>0 alleine</u> stehen !!!

Der Ausdruck $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ heißt Diskriminante.

Es gilt:
$D>0 \quad \Rightarrow$ zwei versch. reelle Lösungen
$D=0 \quad \Rightarrow$ eine reelle Doppellösung
$D<0 \quad \Rightarrow$ keine reelle Lösung

<u>Beispiel:</u>

$$-3x+6x+45=0 \qquad |\div(-3)$$
$$x^2-2x-15=0 \qquad \textit{Normalform}$$
$$x_{1/2}=-\frac{(-2)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2-(-15)}$$
$$x_{1/2}=1\pm\sqrt{16}$$
$$x_1=1+4=5$$
$$x_2=1-4=-3$$
$$L=\{-3;5\}$$

<u>Aufgaben:</u>
Bestimmen Sie die Lösungsmenge L der quadratischen Gleichungen:

13. $2x^2-3x-2=0$

14. $4x^2+12x+9=0$

15. $x^2+1=0$

16. $-6x^2+x+1=0$

17. Ein Rechteck hat den Flächeninhalt $A=2475\,m^2$. Eine Rechteckseite ist 10 m länger als die andere. Wie lang sind die Seiten?

10. <u>Lineare Funktionen</u>

Aufstellen von Geradengleichungen, Steigung m und y-Achsenabschnitt b

Eine Gerade ist durch zwei Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$ oder durch einen Punkt und die Steigung m der Geraden eindeutig festgelegt. Die Funktionsgleichung einer Geraden lautet:

$$y=mx+b \qquad m,b\in R$$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$: **Steigung der Geraden**

Merke: Die Steigung m legt fest, wie viele Einheiten die lin. Funktion steigt bzw. fällt, wenn man (ausgehend von einem Punkt) eine Einheit nach rechts geht, z.B.:

a) m = 5 => 1 Einheit nach rechts, 5 nach oben
b) m = - $\frac{3}{2}$ => 2 Einheiten nach rechts, 3 nach unten

b: y-Achsenabschnitt => Schnittpunkt mit der y-Achse Sy (**0** / b)

Beispiele:
Die Gerade g verläuft durch die Punkte $P_1(2/2)$ und $P_2(4/3)$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g.

- Bestimmung der Steigung m

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{4-2} = \frac{1}{2}$$

- Einsetzen von m und z. B. $P_1(2;2)$ in die Geradengleichung von g

$2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b$ => $b = 1$ (Gleichung nach b aufgelöst)

g: $y = \frac{1}{2}x + 1$

Bestimmung der Nullstelle (Schnittpunkt mit der x-Achse)

Im Schnittpunkt mit der x-Achse ist der Funktionswert (der y-Wert) gleich Null.
Folglich muss die Funktionsgleichung gleich Null gesetzt werden!

Beispiel:

h: **y** **=** -7x + 2

0 **=** -7x + 2 I – 2

-2 = -7x I :(-7)

$\frac{2}{7}$ = x => N ($\frac{2}{7}$ / **0**)

Ermitteln des Schnittpunkts von Geraden

Im Schnittpunkt haben beide Geraden sowohl den gleichen x-Wert als auch den gleichen Funktionswert (y-Wert).
Somit müssen beide Geradengleichungen gleichgesetzt werden!

Beispiel:

h: **y =** -3x – 1
II
g: **y =** -5x + 2

Gleichsetzen und nach x auflösen: -3x – 1 = -5x + 2 => x = $\frac{3}{2}$

x = $\frac{3}{2}$ einsetzen in h oder g: h: y = -3 * $\frac{3}{2}$ – 1 => y = - $\frac{11}{2}$

Koordinaten des Schnittpunktes: S ($\frac{3}{2}$ / - $\frac{11}{2}$)

Spezielle lineare Funktionen

a) **Lineare Funktionen mit gleicher Steigung** bezeichnet man als **parallel**. Ihre Graphen schneiden sich nie.

Beispiel: h: y = **-2**x + 4 und g: y = **-2**x – 1 verlaufen parallel zueinander.

b) **Lineare Funktionen mit Steigung Null** bezeichnet man als **konstante Funktionen**. Sie verlaufen parallel zur x-Achse.

Die Funktionsgleichung einer konstanten Funktion lautet **y = b**, z. B. y = 10

Aufgaben:

1. Von einer Geraden sind zwei Punkte bekannt. Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der zugehörigen Geraden g.

   a) $P_1(1/1)$ $P_2(-1/-5)$

   b $R(4/3)$ $S(3/1)$

   c) $P(-2/7)$ $Q(1/-8)$

2. Eine Gerade h verläuft parallel zur Geraden g mit der Gleichung $y = 2x - 1$ und geht durch den Punkt $A(1/0)$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h.

3. Gegeben sind folgende Geradengleichungen. Zeichnen Sie die jeweilige Gerade in ein kartesisches Koordinatensystem.

   a) $y = 2x - 2$

   b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

c) $y = -3x + 2$

Notieren Sie zudem für jede dieser linearer Funktionen deren Steigung, den y-Achsenabschnitt und ermitteln Sie exakt, d.h. rechnerisch, die jeweilige Nullstelle.

4. Es seien folgende Geradengleichungen gegeben. Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt der Geraden, sofern möglich.
(Zusatzfrage: Wie lassen sich Ihre Ergebnisse überprüfen?)

a) h: $y = 0{,}5x - 2$ g: $y = 2{,}5x - 1$

b) f: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ h: $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

c) g: $y = -3x + 2$ f: $y = -x + 4$

5. Finden Sie ein Beispiel für konstante Funktionen in alltäglichen Situationen, möglichst auch mit passender Funktionsgleichung.

Lösungen

1. Grundlegende Rechenregeln

1.	*61*	*2.*	*-50*	*3.*	*-12*		
4.	*-76*	*5.*	*-18*	*6.*	*29a – 18b*		
7.	*-36y – z*	*8.*	$27ab^3 + 12ab - 3a^3b^2$			*9.*	*69*
10.	*78*	*11.*	*48abc*	*12.*	*0*		

2. Auflösen von Klammern (auch in verschachtelten Termen)

1.	*4a + 21*	*2.*	*-a + 5*	*3.*	*7a + 12b – 8*
4.	*-34*	*5.*	*4x – 3y + 1*		

3. Ausklammern (Faktorisieren) und Ausmultiplizieren

1.	*9(a + 2)*	*2.*	*5(-5a + 2b)*	*3.*	*a(b – c + 1)*
4.	$6ab(2 + 6b^2 + 3a)$	*5.*	$-16x^2 + 24x$		
6.	$42bc - 35bd + 21b^2$	*7.*	$20a^{11}b^2 - 4a^9b^3 + 12a^7b^6$		

8. $-25x^{13}y^4 + 5x^{15}y^7 - 30x^{11}y^5$

9. *Beim Ausklammern wird eine Summe in ein Produkt umgewandelt.*

4. Multiplikation von Klammertermen und binomische Formeln

1.	$2x - 2x^2 + y - xy$	*2.*	$xy + 2x - y - 2$
3.	$5ab + a^2 - 5a + 6b^2 - 15b$	*4.*	$2x^2 + 3x - 6xy + 15y - 20$
5.	$y^2 - 18y + 81$	*6.*	$x^{14} - 4$
7.	$16x^2 + 24x + 9$	*8.*	$64b^{12} - 80a^3b^6 + 25a^6$
9.	$-17x^2 + 14x - 17$	*10.*	$(a-5)^2$
11.	$(9c^4 - 6)(9c^4 + 6)$	*12.*	$(7a^2 + 3)^2$

5. *Addition und Subtraktion von Bruchtermen*

1. $\frac{19}{35}$

2. $-\frac{1}{12}$

3. $\frac{3a+1}{(a+1)a}$

4. $\frac{bc-ac+ab}{abc}$

5. $\frac{-2x+4y}{x^2-y^2}$

6. $\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{x^2-y^2}$

6. *Multiplikation und Division von Bruchtermen*

1. $\frac{7}{36}$

2. $-\frac{5}{16}$

3. $\frac{2x^2}{y^2}$

4. $\frac{1}{10}$

5. $\frac{(x+y)^2}{xy}$

6. $\frac{1}{2}$

7. $\frac{x}{b}$

8. $\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$

7. *Potenzen*

1. x^{11}

2. x^{20}

3. a^5

4. a^{15}

5. $-a^6$

6. a^6b^9

7. a^2b

8. 1

9. -1

10. $\frac{b^{10}c^2}{a}$

11. $3^{3^3}=3^{27}$; $\left(3^3\right)^3=3^9$ *(Somit ist die erste Zahl größer.)*

12. *Mit* $a_1=\frac{4}{5}a$ *ist* $\frac{A_1}{A_2}=\frac{16}{25}$; $\frac{V_1}{V_2}=\frac{64}{125}$

8. *Wurzeln*

1. $12a$ *2.* 5 *3.* $\frac{3b}{a}$ *4.* x

5. $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ *6.* $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

7. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \neq \quad a^2 + b^2$ *für* $a,b \neq 0$

8. $5\sqrt{7}$ *9.* $7xyz$

9. *Gleichungen und Gleichungssysteme*

Lösen linearer Gleichungen

L = …
1. *{-3}* *2.* *{2}* *3.* *{3}*

4. *{-1}* *5.* $\{\frac{6}{55}\}$ *6.* *{ }*

7. $\{-\frac{5}{2}\}$

Lineare Gleichungssysteme lösen (hier: LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten)

8. *L = { (2 / -3) }* *9.* *L = { (3,1 / 3,4) }*

10. *L = { (2,5 / -1) }* *11.* *L = { (16 / 52) }*

12. *Die Zahlen sind 45 und 54.*

Quadratische Gleichungen lösen

13. $L = \left\{-\frac{1}{2};\quad 2\right\}$ *14.* $L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ *15.* $L = \{\ \}$ *16.* $L = \left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$

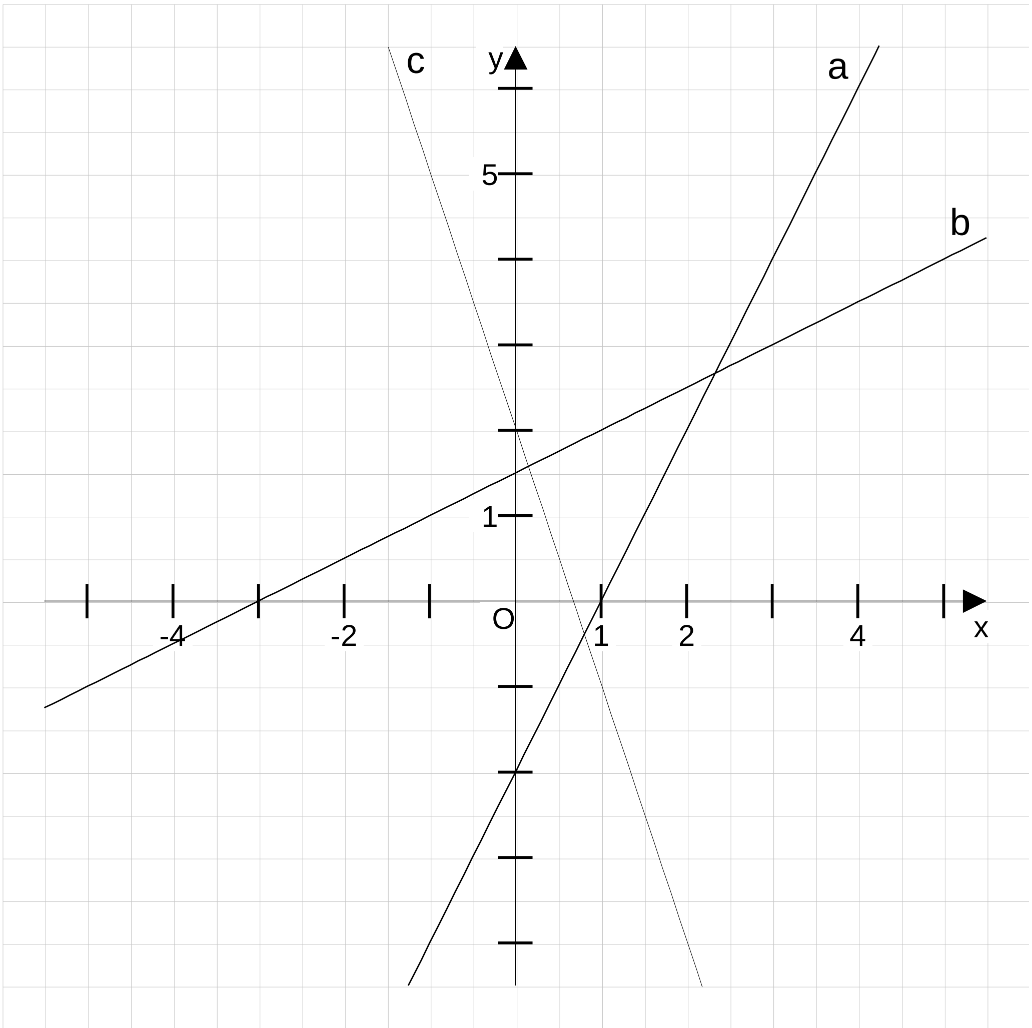
17. $a = 55m;\quad b = 45m$

10. *Lineare Funktionen*

1. *a)* $g_1 : y = 3x-2$
b) $g_{2:} : y = 2x-5$
c) $g_2 : y = -5x-3$

2. $h: y = 2x - 2$

3.



a) *m = 2;* *Sy (0 / -2);* *N (1 / 0)*

b) *m =* $\frac{1}{2}$*;* *Sy (0 /* $\frac{3}{2}$*);* *N (-3 / 0)*

c) *m = -3;* *Sy (0 / 2);* *N (-*$\frac{2}{3}$ */ 0)*

4. a) *S (-0,5 / -2,25)*

b) *kein Schnittpunkt (da die Geraden parallel zueinander verlaufen)*

c) *S (-1 / 5)*

Überprüfung durch Punktprobe bei beiden Geradengleichungen, z. B. bei c)

g: $\boldsymbol{y} = -3\boldsymbol{x} + 2$

$\boldsymbol{5} = -3 * \boldsymbol{(-1)} + 2$

$5 = 5$

f: $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x} + 4$

$\boldsymbol{5} = -\boldsymbol{(-1)} + 4$

$5 = 5$

Beide Aussagen sind wahr!

5. Schülerindividuelle Antwort