

Repetitorium

zur Vorbereitung in

Mathematik

auf die/den

Höhere Berufsfachschule Duale Berufsoberschule Fachhochschulreifeunterricht

Liebe Schülerinnen und Schüler,
wesentliche Voraussetzungen für den erfolgreichen Beginn Ihrer Schulzeit an der Höheren Berufsfachschule, der Dualen Berufsoberschule oder im Fachhochschulreifeunterricht sind im Hinblick auf die Erlangung der Fachhochschulreife ausreichende Vorkenntnisse u.a. in Mathematik.

Zu den mathematischen Vorkenntnissen gehören vor allem:

- Vertrautheit mit grundlegenden Rechenregeln bzw. im Umgang mit Zahlen
- Klammern auflösen können (auch verschachtelte Terme mit mehreren Klammern)
- Ausmultiplizieren von Klammertermen
- Faktorisieren von Termen, d.h. Zerlegen in Faktoren
- Umgang mit den Binomischen Formeln sicher beherrschen
- Bruchterme sicher umformen.
- Gesetze der Potenz- und Wurzelrechnung kennen und anwenden können
- Souveräner Umgang mit linearen Funktionen und Gleichungen (Bestimmen bzw. Ablesen der Steigung, des Schnittpunktes mit der y-Achse und der Nullstelle einer vorgegebenen linearen Funktion; Herleitung der linearen Funktionsgleichung, falls zwei Punkte oder Punkt und Steigung gegeben sind; Zeichnen der Graphen linearer Funktionen; Kenntnis spezieller linearer Funktionen wie parallele Geraden oder konstante Funktionen)
- Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen lösen können
- Quadratische Funktionen untersuchen und zeichnen können (z. B. Ermitteln des Schnittpunktes mit der y-Achse und der Nullstellen sowie des Scheitelpunktes; Bestimmung der Schnittpunkte zweier Funktionen, z. B. von Parabel und Gerade) bzw. quadratische Gleichungen lösen können

- Darüber hinaus sind Grundkenntnisse in bspw. Prozent, Zins- und Dreisatzrechnung sowie Basiskenntnisse in Flächen- und Volumenberechnung in unterschiedlichsten Zusammenhängen wie z. B. Textaufgaben gefragt.

Die vorliegenden Aufgaben - mit Lösungen im Anhang - sollten Sie bis zum Beginn des neuen Schuljahres durcharbeiten, um Ihr mathematisches Wissen aufzufrischen und gegebenenfalls bestehende Wissenslücken selbstständig aufzuarbeiten. Bitte notieren Sie offene Fragen. Suchen Sie auch Hilfen in Ihren Unterlagen zum Mathematikunterricht (z.B. Lehrbücher, Formelsammlung, Mitschriften).

Und nun viel Erfolg!

1. Grundlegende Rechenregeln

Multiplikation und Division von ganzen Zahlen

Regel 1a:

Das Produkt (der Quotient) zweier Zahlen mit gleichem Vorzeichen ist positiv.

Das Produkt (der Quotient) zweier Zahlen mit unterschiedlichem Vorzeichen ist negativ.

Es gilt folglich: $(+a) * (+b) = + ab$ $(+a) * (-b) = - ab$
 $(-a) * (-b) = + ab$ $(-a) * (+b) = - ab$ (analog für Division)

Beispiele:

- a) $6 * 3 = 18$ $9 * (-8) = -72$
- b) $-6 * (-4) = 24$ $-9 * (+5) = -45$
- c) $-4 * (-5) * (-3) = -60$ $-12x * 4y * (-2z) = 96xyz$

Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen

Regel 1b:

Es gilt: $a + (+b) = a + b$ $a + (-b) = a - b$
 $a - (-b) = a + b$ $a - (+b) = a - b$

Beispiele:

- a) $5 + (-3) = 5 - 3$ $8 + (-6) = 8 - 6$
- b) $6 - (-4) = 6 + 4$ $9 - (+2) = 9 - 2$

Regel 1c:

Zahlen mit gleichem Vorzeichen werden addiert, indem man die Beträge addiert und das Vorzeichen beibehält.

Beispiele:

a) $+12 + 21 = + (12 + 21) = + 33$

b) $-9 - 7 = - (9 + 7) = - 16$

c) $-9 + (-7) = - (9 + 7) = - 16$ (führt laut Regel 1b zum gleichen Ergebnis)

Regel 1d:

Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen werden addiert, indem man vom größeren Betrag den kleineren Betrag subtrahiert; das Ergebnis erhält das Vorzeichen der betragsmäßig größeren Zahl.

Beispiele:

a) $+12 - 25 = - (25 - 12) = - 13$

b) $-19 + 7 = - (19 - 7) = - 12$

c) $-39 + 45 = + (45 - 39) = + 6$

d) $+45 - 39 = + (45 - 39) = +6$

Tipp:

Oftmals kann man sich diese Regeln leicht veranschaulichen, z. B.:

$-9 - 7 = -16$ 9 € und 7 € Schulden ergeben 16 € Schulden

$-2 + 6 = +4$ Temperatur steigt von -2 ° C um 6 auf $+4$ ° C

Zusammenfassen vom Termen

Regel 1e:

Terme können nur zusammengefasst, also addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sie gleichartig sind.

Beispiele:

a) $2x - 17y + 32x - 11y = 34x - 28y$

b) $5a - 6b - 4c + 7b - 5a + 3c = b - c$

c) $12x^2y - 8xy + 9xy^2 + 5x^2y = 17x^2y - 8xy + 9xy^2$

Reihenfolge der Berechnung

Regel 1f:

Hinsichtlich der Reihenfolge der durchzuführenden Rechenoperationen hat die **Klammerrechnung** Vorrang vor der **Potenz-** bzw. **Wurzelrechnung**, diese wiederum hat Vorrang vor der **Punktrechnung** und diese vor der **Strichrechnung**.

Eselsbrücke: alphabetisch geordnet => **K Po Pu S**

Beispiele:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad 2^*(5-3)^3 + 6:3 = \\ \quad 2^* \quad 2^3 \quad + 6:3 = \quad \text{K} \\ \quad 2^* \quad 8 \quad + 6:3 = \quad \text{Po} \\ \quad 16 \quad + 2 = \quad \text{Pu} \\ \quad 18 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{S} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad 4^*\sqrt{11-2} - 6*2 = \\ \quad 4^*\sqrt{9} \quad - 6*2 = \quad \text{K (hier ist bei } 11-2 \text{ gedanklich eine Klammer zu setzen)} \\ \quad 4*3 \quad - 6*2 = \quad \text{Po (in dem Fall eine Wurzel)} \\ \quad 12 \quad - 12 = \quad \text{Pu} \\ \quad 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{S} \end{array}$$

Aufgaben:

1. $34 + 27$
2. $-31 - 19$
3. $61 - 73$
4. $-22 - 54$
5. $-34 + 16$
6. $42a - 11b - 13a - 7b$
7. $-13x - 22y + 8z + 13x - 9z - 14y$
8. $11ab^3 + 12ab - 3a^3b^2 + 16ab^3$
9. $2^*(6-3)^3 + 5*3$
10. $3^*(7-2)^2 + 12:4$
11. $8a * (-2b) * (-3c)$
12. $9x * (-5y) * 3x * 0 * (-z)$

2. Auflösen von Klammern (auch in verschachtelten Termen)

Regeln:

Steht vor einem Klammerterm ein Additionszeichen (+), so kann man die Klammern weglassen und die Rechenzeichen in der Klammer bleiben gleich.

Steht vor einem Klammerterm ein Subtraktionszeichen (-), so ändern sich beim Weglassen der Klammern die Rechenzeichen.

Bei verschachtelten Termen sind zunächst die inneren Klammern, anschließend die äußeren Klammern aufzulösen.

Beispiele:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad 5a + (12 - 3a) = \text{(vor der 12 in der Klammer kann man sich ein + denken)} \\ \quad 5a \quad + 12 - 3a = \\ \quad 2a \quad + 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad 13x - (-5x + 12y) - 1 = \\ \quad 13x \quad + 5x - 12y - 1 = \\ \quad 18x \quad - 12y - 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 4a - [5 - (2b - 3a) + (4b - 2a)] &= \text{(zunächst die inneren - runden- Klammern auflösen)} \\
 4a - [5 - 2b + 3a + 4b - 2a] &= \\
 4a - [5 + 2b + a] &= \\
 4a - 5 - 2b - a &= 3a - 5 - 2b
 \end{aligned}$$

Aufgaben:

1. $9a + (21 - 5a)$
2. $-25a - (-6 - 24a) - 1$
3. $6a - [8 - (3b + 3a) - (9b - 2a)]$
4. Wie lautet das Endergebnis bei Aufgabe 3 für $a = -2$ und $b = -1$?
5. $-8 - [-3x + (3y - 3x) - (9 - 2x)]$

3. Ausklammern (Faktorisieren) und Ausmultiplizieren

Regel:

Kommt in allen Summanden eines Terms ein gemeinsamer Faktor vor, so kann dieser ausgeklammert werden.

Folglich wird beim Faktorisieren eine Summe in ein Produkt umgewandelt.

Beispiele:

- a) $3a + 12 = \mathbf{3}(a + 4)$
- b) $15bc - 9cd = \mathbf{3c}(5b - 3d)$
- c) $12a^6b^5 - 3a^9b^2 + 18a^4b^7 = \mathbf{3a^4b^2}(4a^2b^3 - a^5 + 6b^5)$
- d) $mn + ms + mt - m = \mathbf{m}(n + s + t - 1)$

Die Probe des Ausklammerns erfolgt durch Ausmultiplizieren.

Z. B. bei Bsp. d) $m(n + s + t - 1) = mn + ms + mt - m$

Regel:

Beim Ausmultiplizieren wird jeder Summand der Klammer mit dem Faktor außerhalb der Klammer multipliziert.

Dementsprechend wird beim Ausmultiplizieren ein Produkt in eine Summe umgewandelt.

Beispiele:

- a) $(a + 7) \cdot 5 = 5a + 35$
- b) $9d(5b - 3d) = 45bd - 27d^2$
- c) $3a^5b^2(5a^4 - a^2b + 6b^5) = 15a^9b^2 - 3a^7b^3 + 18a^5b^7$

Wie man leicht erkennt, stellt das Ausklammern die Probe des Ausmultiplizierens dar.

Aufgaben: Faktorisieren Sie oder multiplizieren Sie aus

1. $9a + 18$

2. $-25a + 10b$

3. $ab - ac + a$

4. $12ab + 36ab^3 + 18a^2b$

5. $-8x(2x - 3)$

6. $(6c - 5d + 3b)7b$

7. $4a^7b^2(5a^4 - a^2b + 3b^4)$

8. $-5x^{11}y^4(5x^2 - x^4y^3 + 6y)$

9. Ergänzen Sie: Beim Ausklammern wird _____ in _____ umgewandelt.

4. Multiplikation von Klammertermen und binomische Formeln

Regel:

Beim Multiplizieren zweier Klammern wird jeder Summand der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert. Dabei sind die jeweiligen Vorzeichen zu berücksichtigen.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Beispiele:

a) $(x + 4)(y + 3) = x \cdot y + x \cdot 3 + 4 \cdot y + 4 \cdot 3 = xy + 3x + 4y + 12$

b) $(a + 2b)(3b - 1) = a \cdot 3b - a \cdot 1 + 2b \cdot 3b - 2b \cdot 1 = 3ab - a + 6b^2 - 2b$

c) $(x + 4)(x + 4) = x^2 + 4x + 4x + 16 = x^2 + 8x + 16$

d) $(a - 9)(a - 9) = a^2 - 9a - 9a + 81 = a^2 - 18a + 81$

e) $(a - 10)(a + 10) = a^2 - 10a + 10a - 100 = a^2 - 100$

Wie man sieht, handelt es sich bei den Beispielen c, d, e um Spezialfälle, die **Binomischen Formeln**:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2;$$

Diese sollten möglichst ohne Berechnung direkt angewandt werden können! Bei den Beispielen oben wurden sie lediglich durch Ausmultiplizieren eines Binoms (zwei gleiche Klammerterme) hergeleitet.

Auch „rückwärts“ sollte man sie beherrschen, d.h. beim Zerlegen von Summen in Faktoren.

Beispiele:

a) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$ (s. o.)

b) $(a + c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$

c) $(y - 11)^2 = y^2 - 22y + 121$

d) $(a - 5)(a - 5) = a^2 - 10a + 25$

e) $(8a - 3b)^2 = 64a^2 - 48ab + 9b^2$

f) $(5a^4 - 4b^3)^2 = 25a^8 - 40a^4b^3 + 16b^6$

g) $(7a^6 - 3a^5)(7a^6 + 3a^5) = 49a^{12} - 9a^{10}$

Binomische Formeln "rückwärts":

h) $36a^{12} - 24a^6b^3 + 4b^6 = (6a^6 - 2b^3)^2$

i) $100a^{16} + 60a^{11} + 9a^6 = (10a^8 + 3a^3)^2$

j) $a^2 - 10a + 16$ geht nicht, da $2 \cdot a \cdot 4$ ungleich $10a$

k) $49b^{12} - 25 = (7b^6 - 5)(7b^6 + 5)$

Aufgaben:

Multiplizieren Sie aus bzw. wenden Sie direkt die binomischen Formeln an und fassen Sie gfs. zusammen:

1. $(2x + y)(1 - x)$

2. $(x - 1)(y + 2)$

3. $(a + 3b)(2b + a - 5)$

4. $(x - 3y + 4)(2x - 5)$

5. $(y - 9)^2$

6. $(x^7 + 2)(x^7 - 2)$

7. $(4x + 3)(4x + 3)$

8. $(8b^6 - 5a^3)^2$

9. $(x - 3)(x + 5) - 2(3x - 1)^2$

Faktorisieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln, falls möglich:

10. $a^2 - 10a + 25$

11. $81c^8 - 36$

12. $49a^4 + 42a^2 + 9 =$

5. Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Regel:

Ungleichnamige Bruchterme werden zunächst gleichnamig (gleicher Nenner) gemacht. Anschließend werden die gleichnamigen Terme addiert (subtrahiert), indem man die Zähler addiert (subtrahiert) und den Nenner beibehält.

Beispiele:

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\text{b) } \frac{a}{b} - \frac{1}{ab} = \frac{a \cdot a}{a \cdot b} - \frac{1}{ab} = \frac{a^2 - 1}{ab}$$

$$\text{c) } \frac{3}{m+2} - \frac{1}{m} = \frac{3 \cdot m}{(m+2) \cdot m} - \frac{1 \cdot (m+2)}{m \cdot (m+2)} = \frac{3m - 1 \cdot (m+2)}{m \cdot (m+2)} = \frac{3m - 1m - 2}{m \cdot (m+2)} = \frac{2m - 2}{m^2 + 2m}$$

Aufgaben:

$$1. \quad \frac{1}{7} + \frac{2}{5}$$

$$2. \quad \frac{2}{9} + \frac{5}{18} - \frac{7}{12}$$

$$3. \quad \frac{2}{a+1} + \frac{1}{a}$$

$$4. \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$5. \quad \frac{3x-y}{x^2-y^2} - \frac{5}{x+y}$$

$$6. \quad \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}$$

Tipp: Bei manchen Aufgaben ist der Einsatz binomischer Formeln vorteilhaft!

6. Multiplikation und Division von Bruchtermen

Regel:

Brüche werden multipliziert, indem man sowohl die Zähler als auch die Nenner miteinander multipliziert.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (\text{Multiplikation})$$

Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (\text{Division})$$

Beispiele:

$$\text{a) } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{11} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 11} = \frac{1}{11}$$

$$\text{b) } \frac{36ab}{11} \cdot \frac{44b}{12a} = \frac{36ab \cdot 44b}{11 \cdot 12a} = \frac{3ab \cdot 4b}{1 \cdot 1a} = 12b^2$$

$$c) \quad \frac{3}{7} : 5 = \frac{3}{7} : \frac{5}{1} = \frac{3 \cdot 1}{7 \cdot 5} = \frac{3}{35}$$

$$d) \quad \frac{m}{c-y} \div \frac{5m}{3c-3y} = \frac{m}{c-y} \cdot \frac{3c-3y}{5m} = \frac{m}{c-y} \cdot \frac{3(c-y)}{5m} = \frac{3}{5}$$

Tipp (insbesondere auch zu den nachfolgenden Aufgaben): Kürzen Sie so früh wie möglich und nutzen Sie Verfahren wie Faktorisieren oder Binomische Formeln, falls möglich!

Aufgaben:

$$1. \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12}$$

$$2. \quad -\frac{9}{8} : \frac{18}{5}$$

$$3. \quad x \cdot \frac{2x}{y^2}$$

$$4. \quad \frac{3a}{4b} \cdot \frac{2b}{15a}$$

$$5. \quad \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \cdot (x+y)$$

$$6. \quad \frac{a}{b+x} \div \frac{4a}{2x+2b}$$

$$7. \quad \frac{-a}{b} \div \frac{a}{-x}$$

$$8. \quad \frac{x-1}{x+1} \div \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

7. Potenzen

Für natürliche Zahlen n wird definiert: $a^n = a \cdot a \dots \cdot a$ (n gleiche Faktoren).

Daraus folgen für $m, n \in \mathbb{N}$ die Rechenregeln:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (\text{für } n > m)$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$a^n b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n$$

Mit den Festsetzungen $a^0 = 1$, $a^1 = a$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($n \in \mathbb{N}$) gelten diese Regeln für alle ganze Zahlen n, m .

Tipps:

Mit einfachen (Zahlen-)Beispielen kann man sich diese Regeln bzw. Festlegungen immer wieder veranschaulichen!

Bei einigen der nachfolgenden Aufgabenstellungen sind mehrere Regeln / Definitionen anzuwenden.

Beispiele:

$$a) \quad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81, \text{ und } \mathbf{NICHT} \quad 3^4 = 3 \cdot 4 = 12 \quad !!!$$

$$b) \quad n^4 \cdot n^{19} = n^{23}$$

$$c) \quad \frac{y^{19}}{y^5} = y^{14}$$

$$d) \quad \left(\frac{a^6}{b^3}\right)^3 = \frac{a^{18}}{b^9}$$

$$e) \quad \frac{c^{m+4}}{c^{m-2}} = c^6$$

Aufgaben:

Vereinfachen Sie:

$$1. \quad x^6 x^5 \quad 2. \quad x^{19} \cdot x \quad 3. \quad \frac{a^9}{a^4} \quad 4. \quad (a^3)^5 \quad 5. \quad (-a^2)^3$$

$$6. \quad (a^2 b^3)^3 \quad 7. \quad \frac{a^{n+1} b^{m+1}}{a^{n-1} b^m} \quad 8. \quad (-1)^{2n} \quad 9. \quad (-1)^{2n+1}$$

$$10. \quad \frac{4a^3 b^4 c}{9c^5} \div \left(\frac{3c^3}{2a^2 b^{-3}}\right)^{-2}$$

11. Welche Zahl ist größer: 3^{3^3} oder $(3^3)^3$?

12. Die Kantenlänge eines Würfels beträgt $\frac{4}{5}$ von der eines zweiten Würfels. Wie verhalten sich die Oberflächen und Volumina der beiden Würfel zueinander?

8. Wurzeln

Die positive Lösung der Gleichung $x^n = a$ ($n \in \mathbb{N}$, $a > 0$) heißt $x = \sqrt[n]{a}$.

Für $n = 2$, also $\sqrt[2]{a}$ schreibt man \sqrt{a} (Quadratwurzel). Die so definierten Wurzeln befolgen die Rechenregeln:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m+n}} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$$

Setzt man $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ und $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$,

so führen die obigen Wurzelregeln zur Erweiterung der Potenzregeln auf rationale Exponenten. (Mit anderen Worten: Die obigen Wurzelregeln lassen sich aus diesen beiden Festlegungen herleiten.)

Beispiele:

a) $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$; Probe: $3^3 = 27$

b) $\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}} = 3$; Probe: $3^4 = 81$

c) $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$; Probe: $5^2 = 25$

Wie man also erkennt, ist das Radizieren (Wurzelziehen) die Umkehrung des Potenzierens (und umgekehrt)!

d) Teilweises Wurzelziehen (Radizieren): $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

e) Rationalmachen des Nenners:

e1) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Erweiterung mit $\sqrt{2}$)

e2) $\frac{2}{5 + \sqrt{3}} = \frac{2(5 - \sqrt{3})}{(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})} = \frac{10 - 2\sqrt{3}}{25 - 3} = \frac{10 - 2\sqrt{3}}{22}$ (Erw. mit $(5 - \sqrt{3})$ und 3.

Bin. F.)

f) $\sqrt{27b} \cdot \sqrt{3b} = \sqrt{81b^2} = 9b$

g) $\frac{\sqrt[3]{128b^5d^{11}}}{\sqrt[3]{2b^2d^5}} = \sqrt[3]{64b^3d^6} = 4bd^2$

Aufgaben:

Berechnen Sie möglichst im Kopf:

1. $\sqrt{2a} \sqrt{72a}$

2. $\sqrt{125} \div \sqrt{5}$

3. $\sqrt{\frac{36a^2b^4}{4a^4b^2}}$

4. $\sqrt{xy} \sqrt{\frac{x}{y}}$

Machen Sie die Nenner rational:

5. $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$

6. $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

7. Zeigen Sie, dass für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ stets $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$ ist.
(Tipp: Eine der binomischen Formeln kann hierbei helfen!)

Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

8. $\sqrt{28} + \sqrt{63}$

9. $\sqrt[3]{63x^7y^6z^2} \div \sqrt[3]{\frac{9x^4y^3}{49z}}$

9. Gleichungen und Gleichungssysteme

Lösen linearer Gleichungen

Beispiele:

a) $5x - 3 = -8x + 2 \quad | + 8x$

$13x - 3 = + 2 \quad | + 3$

$13x = + 5 \quad | : 13$

$x = \frac{5}{13} \quad \Rightarrow L = \left\{ \frac{5}{13} \right\}$

b) $4x - 3 = 4x + 6 \quad | - 4x$

$- 3 = + 6 \quad \text{falsche Aussage!}$

$\Rightarrow L = \{ \} \quad (\text{die Lösungsmenge ist die leere Menge, sprich es gibt keine Lösung})$

Merke:

Das Lösen von linearen Gleichungen erfolgt durch **Äquivalenzumformungen**, bei denen die Lösungsmenge unverändert bleibt. (**Waagenmodell !!!**)

- Addition bzw. Subtraktion derselben Zahl / desselben Terms **auf beiden Seiten**

- Multiplikation bzw. Division mit derselben Zahl / demselben Term **auf beiden Seiten**

Ziel: Auflösen nach x, d.h. x muss am Ende alleine stehen!

Aufgaben: Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungen:

1. $5 + x = 2$

2. $3x + 1 = 7$

3. $2x + 3 = 7x - 12$

4. $x - 1 = -2x - 4$

5. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{1}{11}$

6. $11x + 8 = 11x - 12$

7. $4(2 + 3x) - 2(5x - 2) = 7$

Lineare Gleichungssysteme lösen (hier: LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten)

Beispiele:

a) I) $y = 4x - 1$
II) $6x + 3 = y$

Es gibt mehrere Lösungsansätze. Hier bietet sich das **Gleichsetzungsverfahren** an, da eine Variable (in diesem Bsp. y) jeweils „isoliert“ ist.

$$4x - 1 = 6x + 3 \quad \Rightarrow x = -2 \quad (\text{gleichsetzen und nach } x \text{ auflösen})$$

$$x = -2 \text{ in eine der beiden Gleichungen einsetzen, z. B. I) } y = 4 \cdot (-2) - 1 = -9$$

Lösungsmenge angeben: $L = \{ (-2 / -9) \}$ (zuerst x , dann y ; alphabetisch geordnet!)

b) I) $2x + 3y = 13$
II) $8y - 3 = x$

In diesem Fall bietet sich das **Einsetzungsverfahren** an, da eine Variable (in diesem Bsp. x) in einer Gleichung alleine steht.

I) $2x + 3y = 13$

II) $(8y - 3) = x$

Einsetzen von $(8y - 3)$ für x in Gleichung I), dabei Klammern nicht vergessen!!!

I) $2(8y - 3) + 3y = 13$ (Ausmultiplizieren, zusammenfassen und nach y auflösen)

$$16y - 6 + 3y = 13 \quad \Rightarrow y = 1$$

$$y = 1 \text{ in eine der beiden Gleich. einsetzen, hier am Besten in II) } 8 \cdot 1 - 3 = x \Rightarrow x = 5$$

Lösungsmenge angeben: $L = \{ (5 / 1) \}$

$$\begin{array}{ll}
 \text{c) I)} & 4x + 8y = 28 \quad 3 * \text{(I)} \Rightarrow \text{Ia)} \quad 12x + 24y = 84 \\
 \text{II)} & -3x + 7y = -8 \quad 4 * \text{(II)} \Rightarrow \text{IIa)} \quad -12x + 28y = -32
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Ia)} + \text{IIa)} & 52y = 52 \quad | :52 \\
 & y = 1
 \end{array}$$

$y = 1$ in eine der beiden Gleichungen einsetzen, z. B. II)

$$\begin{array}{l}
 \text{II): } -3x + 7 \cdot 1 = -8 \\
 -3x + 7 = -8 \quad | -7 \\
 -3x = -15 \quad | :(-3) \\
 x = 5
 \end{array}$$

Lösungsmenge angeben: $L = \{ (5 / 1) \}$

Dieses Verfahren bezeichnet man als **Additionsverfahren**.

Merke: Linke Seite minus (bzw. plus) linke Seite, rechte Seite minus (bzw. plus) rechte Seite!

Sind die Vorzeichen gleich (z. B. -2 und -2), so muss man subtrahieren!

Sind sie unterschiedlich (z. B. 3 und -3), so muss man addieren!

Aufgaben: Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit 2 Variablen:

$$\begin{array}{l}
 8. \quad \text{I)} \quad 4x - 3y = 17 \\
 \quad \quad \text{II)} \quad -5x + 6y = -28
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 9. \quad \text{I)} \quad 2x + 4 = 3y \\
 \quad \quad \text{II)} \quad -10 + 4x = y - 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 10. \quad \text{I)} \quad 2x - 3y = 8 \\
 \quad \quad \text{II)} \quad -6x + 12 = 3y
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 11. \quad \text{I)} \quad 3x + 4 = y \\
 \quad \quad \text{II)} \quad -12 + 4x = y
 \end{array}$$

12. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 9. Stellt man die beiden Ziffern um, so erhält man eine Zahl, die um 9 größer ist als die ursprüngliche Zahl. Wie heißt die Zahl?

Quadratische Gleichungen lösen

Für die quadratische Gleichung in **Normalform** $x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) heißt die Lösungsformel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

WICHTIG: 1) Vor x^2 darf „nichts“ stehen (man kann sich den Faktor 1 denken) !!!
 2) Auf einer Seite der quadr. Gleichung muss 0 alleine stehen !!!

Der Ausdruck $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ heißt Diskriminante.

Es gilt: $D > 0 \Rightarrow$ zwei versch. reelle Lösungen
 $D = 0 \Rightarrow$ eine reelle Doppellösung
 $D < 0 \Rightarrow$ keine reelle Lösung

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 -3x + 6x + 45 &= 0 && | \div (-3) \\
 x^2 - 2x - 15 &= 0 && \text{Normalform} \\
 x_{1/2} &= -\frac{(-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-15)} \\
 x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{16} \\
 x_1 &= 1 + 4 = 5 \\
 x_2 &= 1 - 4 = -3 \\
 L &= \{-3; 5\}
 \end{aligned}$$

Aufgaben:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge L der quadratischen Gleichungen:

13. $2x^2 - 3x - 2 = 0$

14. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

15. $x^2 + 1 = 0$

16. $-6x^2 + x + 1 = 0$

17. Ein Rechteck hat den Flächeninhalt $A = 2475 \text{ m}^2$. Eine Rechteckseite ist 10 m länger als die andere. Wie lang sind die Seiten?

10. Lineare Funktionen

Aufstellen von Geradengleichungen, Steigung m und y -Achsenabschnitt b

Eine Gerade ist durch zwei Punkte $P_1(x_1 / y_1)$ und $P_2(x_2 / y_2)$ oder durch einen Punkt und die Steigung m der Geraden eindeutig festgelegt. Die Funktionsgleichung einer Geraden lautet:

$$y = mx + b \quad m, b \in \mathbb{R}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} : \text{Steigung der Geraden}$$

Merke: Die Steigung m legt fest, wie viele Einheiten die lin. Funktion steigt bzw. fällt, wenn man (ausgehend von einem Punkt) eine Einheit nach rechts geht, z.B.:

a) $m = 5 \Rightarrow$ 1 Einheit nach rechts, 5 nach oben

b) $m = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ 2 Einheiten nach rechts, 3 nach unten

b: y-Achsenabschnitt \Rightarrow Schnittpunkt mit der y-Achse S_y ($\mathbf{0} / b$)

Beispiele:

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $P_1(2/2)$ und $P_2(4/3)$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g .

- Bestimmung der Steigung m

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2}{4 - 2} = \frac{1}{2}$$

- Einsetzen von m und z. B. $P_1(2;2)$ in die Geradengleichung von g

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow b = 1 \text{ (Gleichung nach } b \text{ aufgelöst)}$$

$$g: y = \frac{1}{2}x + 1$$

Bestimmung der Nullstelle (Schnittpunkt mit der x-Achse)

Im Schnittpunkt mit der x-Achse ist der Funktionswert (der y-Wert) gleich Null. Folglich muss die Funktionsgleichung gleich Null gesetzt werden!

Beispiel:

$$h: y = -7x + 2$$

$$0 = -7x + 2 \quad | -2$$

$$-2 = -7x \quad | :(-7)$$

$$\frac{2}{7} = x \quad \Rightarrow N\left(\frac{2}{7} / \mathbf{0}\right)$$

Ermitteln des Schnittpunkts von Geraden

Im Schnittpunkt haben beide Geraden sowohl den gleichen x-Wert als auch den gleichen Funktionswert (y-Wert).

Somit müssen beide Geradengleichungen gleichgesetzt werden!

Beispiel: _____

$$\begin{aligned} \text{h: } & y = -3x - 1 \\ & \parallel \\ \text{g: } & y = -5x + 2 \end{aligned}$$

$$\text{Gleichsetzen und nach } x \text{ auflösen: } \quad -3x - 1 = -5x + 2 \quad \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ einsetzen in h oder g: } \quad \text{h: } y = -3 * \frac{3}{2} - 1 \quad \Rightarrow y = -\frac{11}{2}$$

$$\text{Koordinaten des Schnittpunktes: } \quad S \left(\frac{3}{2} \mid -\frac{11}{2} \right)$$

Spezielle lineare Funktionen

a) **Lineare Funktionen mit gleicher Steigung** bezeichnet man als **parallel**. Ihre Graphen schneiden sich nie.

Beispiel: h: $y = -2x + 4$ und g: $y = -2x - 1$ verlaufen parallel zueinander.

b) **Lineare Funktionen mit Steigung Null** bezeichnet man als **konstante Funktionen**. Sie verlaufen parallel zur x-Achse.

Die Funktionsgleichung einer konstanten Funktion lautet $y = b$, z. B. $y = 10$

Aufgaben:

- Von einer Geraden sind zwei Punkte bekannt. Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der zugehörigen Geraden g.
 - $P_1(1/1) \quad P_2(-1/-5)$
 - $R(4/3) \quad S(3/1)$
 - $P(-2/7) \quad Q(1/-8)$
- Eine Gerade h verläuft parallel zur Geraden g mit der Gleichung $y = 2x - 1$ und geht durch den Punkt $A(1/0)$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h.
- Gegeben sind folgende Geradengleichungen. Zeichnen Sie die jeweilige Gerade in ein kartesisches Koordinatensystem.
 - $y = 2x - 2$
 - $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
 - $y = -3x + 2$

Notieren Sie zudem für jede dieser linearer Funktionen deren Steigung, den y-Achsenabschnitt und ermitteln Sie exakt, d.h. rechnerisch, die jeweilige Nullstelle.

4. Es seien folgende Geradengleichungen gegeben. Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt der Geraden, sofern möglich.
(Zusatzfrage: Wie lassen sich Ihre Ergebnisse überprüfen?)

a) h: $y = 0,5x - 2$ g: $y = 2,5x - 1$

b) f: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ h: $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

c) g: $y = -3x + 2$ f: $y = -x + 4$

5. Finden Sie ein Beispiel für konstante Funktionen in alltäglichen Situationen, möglichst auch mit passender Funktionsgleichung.

Lösungen

1. Grundlegende Rechenregeln

- | | | |
|---------------|------------------------------|----------------|
| 1. 61 | 2. -50 | 3. -12 |
| 4. -76 | 5. -18 | 6. $29a - 18b$ |
| 7. $-36y - z$ | 8. $27ab^3 + 12ab - 3a^3b^2$ | 9. 69 |
| 10. 78 | 11. $48abc$ | 12. 0 |

2. Auflösen von Klammern (auch in verschachtelten Termen)

- | | | |
|--------------|------------------|-------------------|
| 1. $4a + 21$ | 2. $-a + 5$ | 3. $7a + 12b - 8$ |
| 4. -34 | 5. $4x - 3y + 1$ | |

3. Ausklammern (Faktorisieren) und Ausmultiplizieren

- | | | |
|---|---------------------------------------|-------------------|
| 1. $9(a + 2)$ | 2. $5(-5a + 2b)$ | 3. $a(b - c + 1)$ |
| 4. $6ab(2 + 6b^2 + 3a)$ | 5. $-16x^2 + 24x$ | |
| 6. $42bc - 35bd + 21b^2$ | 7. $20a^{11}b^2 - 4a^9b^3 + 12a^7b^6$ | |
| 8. $-25x^{13}y^4 + 5x^{15}y^7 - 30x^{11}y^5$ | | |
| 9. Beim Ausklammern wird eine Summe in ein Produkt umgewandelt. | | |

4. Multiplikation von Klammertermen und binomische Formeln

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $2x - 2x^2 + y - xy$ | 2. $xy + 2x - y - 2$ |
| 3. $5ab + a^2 - 5a + 6b^2 - 15b$ | 4. $2x^2 + 3x - 6xy + 15y - 20$ |
| 5. $y^2 - 18y + 81$ | 6. $x^{14} - 4$ |
| 7. $16x^2 + 24x + 9$ | 8. $64b^{12} - 80a^3b^6 + 25a^6$ |
| 9. $-17x^2 + 14x - 17$ | 10. $(a - 5)^2$ |
| 11. $(9c^4 - 6)(9c^4 + 6)$ | 12. $(7a^2 + 3)^2$ |

5. Addition und Subtraktion von Bruchtermen

1. $\frac{19}{35}$

2. $-\frac{1}{12}$

3. $\frac{3a+1}{(a+1)a}$

4. $\frac{bc-ac+ab}{abc}$

5. $\frac{-2x+4y}{x^2-y^2}$

6. $\frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$

6. Multiplikation und Division von Bruchtermen

1. $\frac{7}{36}$

2. $-\frac{5}{16}$

3. $\frac{2x^2}{y^2}$

4. $\frac{1}{10}$

5. $\frac{(x+y)^2}{xy}$

6. $\frac{1}{2}$

7. $\frac{x}{b}$

8. $\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$

7. Potenzen

1. x^{11}

2. x^{20}

3. a^5

4. a^{15}

5. $-a^6$
- 1

6. a^6b^9

7. a^2b

8. 1

9.

10. $\frac{b^{10}c^2}{a}$

11. $3^{3^3} = 3^{27}$; $(3^3)^3 = 3^9$ (Somit ist die erste Zahl größer.)

12. Mit $a_1 = \frac{4}{5}a$ ist $\frac{A_1}{A_2} = \frac{16}{25}$; $\frac{V_1}{V_2} = \frac{64}{125}$

8. Wurzeln

1. $12a$ 2. 5 3. $\frac{3b}{a}$ 4. x
5. $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ 6. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$
7. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2$ für $a, b \neq 0$
8. $5\sqrt{7}$ 9. $7xyz$

9. Gleichungen und Gleichungssysteme

Lösen linearer Gleichungen

$L = \dots$

1. $\{-3\}$ 2. $\{2\}$ 3. $\{3\}$
4. $\{-1\}$ 5. $\{\frac{6}{55}\}$ 6. $\{ \}$
7. $\{-\frac{5}{2}\}$

Lineare Gleichungssysteme lösen (hier: LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten)

8. $L = \{(2/-3)\}$ 9. $L = \{(3,1/3,4)\}$
10. $L = \{(2,5/-1)\}$ 11. $L = \{(16/52)\}$
12. Die Zahlen sind 45 und 54.

Quadratische Gleichungen lösen

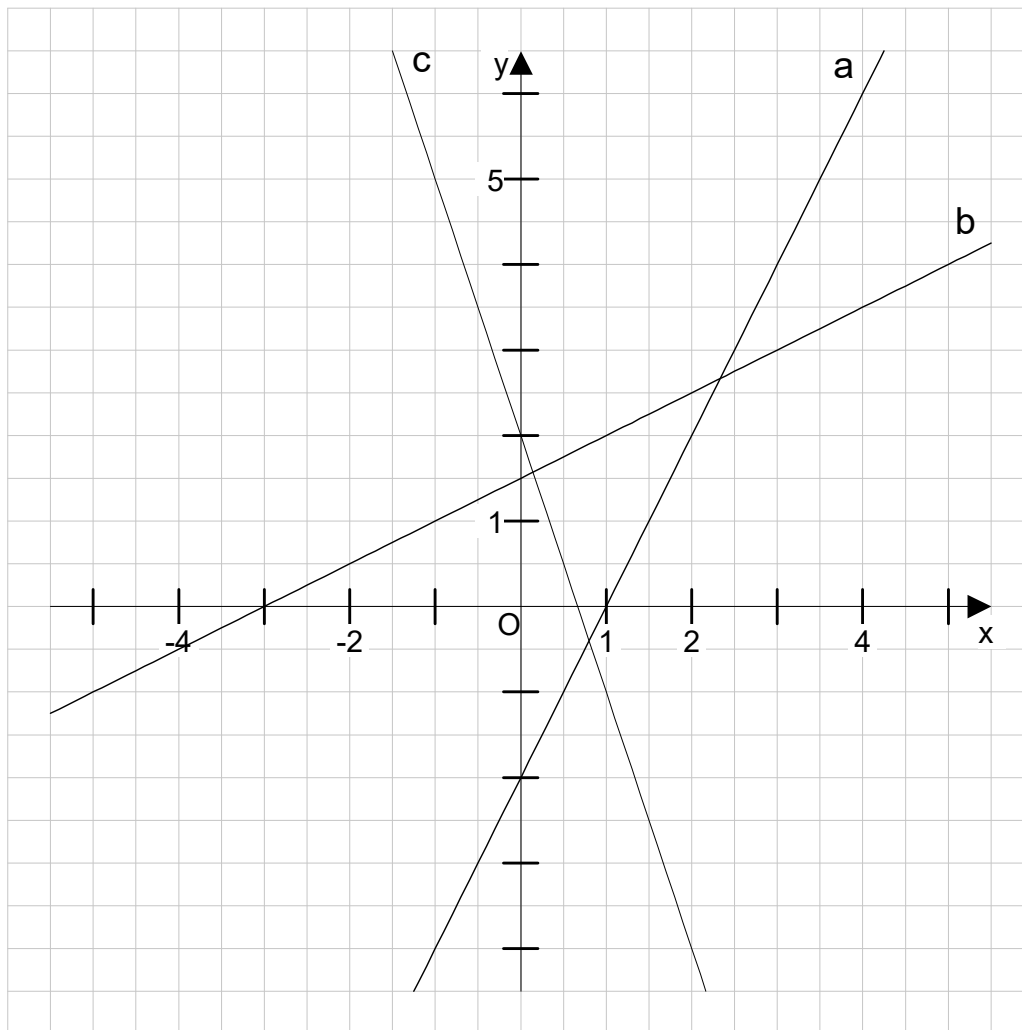
13. $L = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$ 14. $L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ 15. $L = \{ \}$ 16. $L = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$
17. $a = 55m; b = 45m$

10. Lineare Funktionen

1. a) $g_1 : y = 3x - 2$
b) $g_2 : y = 2x - 5$
c) $g_2 : y = -5x - 3$

2. $h: y = 2x - 2$

3.



a) $m = 2$; $S_y (0 / -2)$; $N (1 / 0)$

b) $m = \frac{1}{2}$; $S_y (0 / \frac{3}{2})$; $N (-3 / 0)$

c) $m = -3$; $S_y (0 / 2)$; $N (-\frac{2}{3} / 0)$

4. a) $S (-0,5 / -2,25)$

b) *kein Schnittpunkt (da die Geraden parallel zueinander verlaufen)*

c) $S (-1 / 5)$

Überprüfung durch Punktprobe bei beiden Geradengleichungen, z. B. bei c)

$$\begin{aligned}g: \quad & \mathbf{y = -3x + 2} \\ & \mathbf{5 = -3 \cdot (-1) + 2} \\ & \mathbf{5 = 5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f: \quad & \mathbf{y = -x + 4} \\ & \mathbf{5 = -(-1) + 4} \\ & \mathbf{5 = 5}\end{aligned}$$

Beide Aussagen sind wahr!

5. Schülerindividuelle Antwort